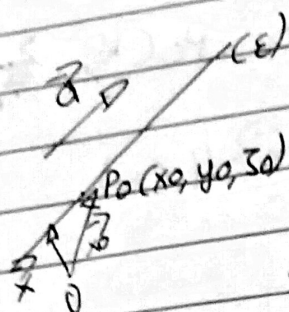


3/4/17

Την προηγούμενη φορά είπαμε:

Εξισώσεις ευθείας στον χώρο



Η (ϵ) καθορίζεται από ένα σημείο της $P_0(x_0, y_0, z_0)$

και διάνυσμα $\vec{a} \neq \vec{0} = (a, b, \gamma) \parallel (\epsilon)$

• Διανυσματική εξίσωση $\vec{r} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a}$

• Παραμετρικές εξισώσεις $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda \gamma \end{cases}$

• Συμμετρικές εξισώσεις: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{\gamma}$

• Αναλυτικές εξισώσεις

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα: Δίνεται η ευθεία (ϵ) : $\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \text{ (1)} \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \text{ (2)} \end{cases}$

Να βρεθούν όλα τα επίπεδα που περιέχουν την ευθεία (ϵ) (είναι η λεγόμενη αξονική δέσμη επιπέδων).

Απάντηση: Κάθε επίπεδο που περιέχει την (ϵ) : $\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$

έχει εξίσωση της μορφής $\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2) = 0$ με $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

Η $*$ παριστάνει επίπεδο. Αν όχι τότε θα έπρεπε

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = 0, \lambda B_1 + \mu B_2 = 0 \text{ και } \lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

άρα άτονο

Κάθε επίπεδο με εξίσωση της μορφής (*) περιέχει την (ε)

Αντίστροφα: Έστω επίπεδο (π) που περιέχει την (ε). Έστω $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (π)$ αλλά $P_0 \notin (ε)$

Θεωρώ το επίπεδο με εξίσωση:

$$-(A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2 z_0 + \Delta_2)(A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1) + (A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1 z_0 + \Delta_1)(A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2) = 0$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση ^{μια ευθεία στο χώρο που προκύπτει από 2 εδρ} του επιπέδου που περιέχει την ευθεία (ε):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z - 6 = 0 \\ x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

και το σημείο $O(0,0,0)$

Λύση: Το ζητούμενο επίπεδο ανήκει στην αξονική δέσμη της (ε) και άρα έχει εξίσωση (π)

$$\lambda(3x - 2y + 6z - 6) + \mu(x - y + 3z + 4) = 0 \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (3\lambda + \mu)x - (2\lambda + \mu)y + (6\lambda + \mu)z - 6\lambda + 4\mu = 0$$

$$O(0,0,0) \in (π) \Rightarrow -6\lambda + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{3}{2}\lambda}$$

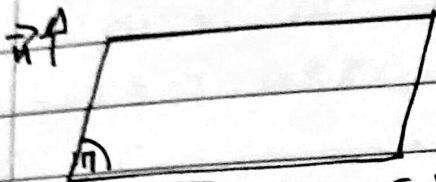
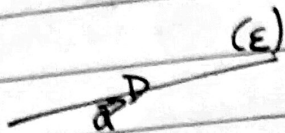
$$(π) \left(3\lambda + \frac{3\lambda}{2}\right)x - \left(2\lambda + \frac{3\lambda}{2}\right)y + \left(6\lambda + \frac{3\lambda}{2}\right)z = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\lambda}{2}x - \frac{7\lambda}{2}y + \frac{15\lambda}{2}z = 0 \Leftrightarrow \text{έστω βρήκα εξίσωση.}$$

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

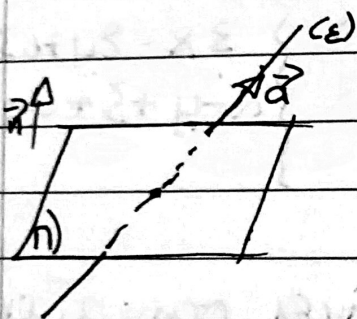
Δίνεται ευθεία (ϵ) . $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (\epsilon)$
 $\vec{0} + \vec{a} = (a, \beta, \gamma) \parallel (\epsilon)$

και επίπεδο (π) $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ $\vec{0} \neq \vec{n} = (A, B, \Gamma) \perp (\pi)$



$\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow (\epsilon) \parallel (\pi)$ ή (ϵ) περιέχεται στο (π)

$\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \neq 0 \Leftrightarrow$ Η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται σε ένα σημείο.



Οι παραμετρικές εξισώσεις της (ϵ) $\begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha \\ y = y_0 + \lambda \beta \\ z = z_0 + \lambda \gamma \end{cases}$

Η εύρεση του σημείου τομής της (ϵ) με το (π) ανάγεται στην επίλυση του

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha, y = y_0 + \lambda \beta, z = z_0 + \lambda \gamma \end{cases}$$

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

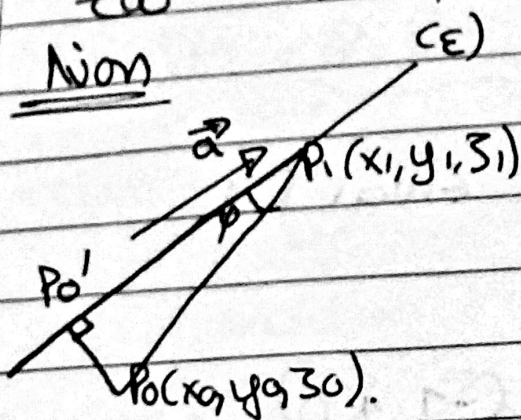
$$A(x_0 + \lambda \alpha) + B(y_0 + \lambda \beta) + \Gamma(z_0 + \lambda \gamma) + \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta + \lambda (Aa + Bb + \Gamma \gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle + Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta = 0$$

Πρόβλημα: Δίνεται ευθεία (ϵ) η οποία διέρχεται από το σημείο $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και είναι $(\epsilon) \parallel \vec{a} = (a, b, \gamma) \neq \vec{0}$. Να υπολογιστεί η απόστασή του $\perp(P_0, (\epsilon))$.

Λύση



$$\begin{aligned} \perp(P_0, (\epsilon)) &= \perp(P_0, P_0') = \\ &= \perp(P_0, P_1) \sin \mu = |P_0 P_1| \sin \mu = \\ &= \frac{|P_0 P_1| |\vec{a}| \sin \mu}{|\vec{a}|} \end{aligned}$$

Απαιτούμε: $\perp(P_0, (\epsilon)) = \frac{|P_0 P_1 \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

Επιπεδομετρία: $(\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0$

$$\perp(P_0, (\epsilon)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Άσκηση 1. Να αποδειχθεί διανυσματικά ότι:

- α) Η διάμεσος τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων του.
- β) Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
- γ) Τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση 2. Έστω τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ και θεωρούμε τις διαμέσους AM_1 και BM_2 αυτού. Αν M το σημείο τομής των διαμέσων AM_1 και BM_2 , να αποδείξετε διανυσματικά ότι:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \text{ και } \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$

Άσκηση 3. Έστω τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ και θεωρούμε τη διάμεσο $B\Delta$ αυτού. Θεωρούμε την ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A του τριγώνου, το μέσο E της διαμέσου $B\Delta$ και τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε διανυσματικά ότι:

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{BZ} \text{ και } \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EZ}.$$

Άσκηση 4. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και να συμπεράνετε ότι αποτελούν μία νέα βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 5. Θεωρούμε μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο με τα διανύσματα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$(((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$$

Άσκηση 6. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα.

Στη συνέχεια θεωρούμε διάνυσμα $\vec{\delta} \in \mathbb{R}^3$ το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = \vec{0}.$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$. Να δειχθεί ότι:

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \iff (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma}) \times \vec{\beta} = \vec{0}.$$

Άσκηση 8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1, -1), \vec{\beta} = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Να υπολογιστεί η παράσταση

$$(((\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$$

Άσκηση 9. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε ανά δύο έχουν ίσες γωνίες. Θεωρούμε τα μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{\lambda} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\mu} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \times (\vec{\alpha} - \vec{\gamma})$. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{\lambda}$ και $\vec{\mu}$ είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Άσκηση 10. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (4, -5, 3)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\beta} = (-2, 3, 1)$.

Άσκηση 11. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1, 2), B(2, 3), \Gamma(-4, 3)$.

Άσκηση 12. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(3, 1, 1), B(1, 1, 1), \Gamma(1, 3, 5)$ ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις γωνίες και τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

Άσκηση 13. Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με διαγωνίους τα διανύσματα $\vec{x} = 7\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{y} = -3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Άσκηση 14. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1, 1), B(0, 0, 1), \Gamma(3, 3, 0)$ και $\Delta(1, 0, 0)$.

α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A, B, Γ ορίζουν τρίγωνο, του οποίου να προσδιορίσετε το εμβαδόν.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{B}\Delta$.

Άσκηση 15. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\gamma}$. Επιπλέον, θεωρούμε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ και επαληθεύει τη σχέση

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \times \vec{x}.$$

Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Να γίνει εφαρμογή με τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 0, 1), \vec{\beta} = (0, 1, 1), \vec{\gamma} = (3, 0, 3)$.

Άσκηση 16. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$ είναι γνωστά, να λυθεί ως προς το διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, η (διανυσματική) εξίσωση:

$$\vec{x} \times \vec{\alpha} = \vec{\beta} - \vec{x}$$

Άσκηση 17. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \neq 0$ και $\langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle = 0$, να προσδιοριστεί διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε:

$$\vec{\alpha} \times \vec{u} = \vec{\gamma} \text{ και } \langle \vec{\beta}, \vec{u} \rangle = \lambda$$

Εφόσον κάνετε την επαλήθευση, στη συνέχεια να γίνει εφαρμογή για $\vec{\alpha} = (1, 2, 1), \vec{\beta} = (-1, 4, 2), \vec{\gamma} = (3, 1, -5)$ και $\lambda = 5$.

Άσκησης από ψυδδαδίο

Άσκηση 14:

Δίνονται τα σημεία $A(1,1,1)$, $B(0,0,1)$, $\Gamma(3,3,0)$
 $\Delta(1,0,0)$

- Τα A, B, Γ ορίζουν τρίγωνο + εμβαδόν
- $\hat{A}\hat{B}\Delta$

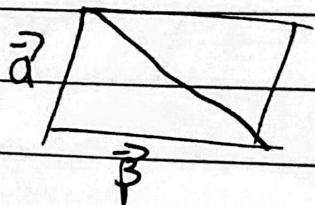
Λύση

- $\vec{BA} = (1,1,0)$, $\vec{A\Gamma} = (2,2,-1)$ είναι Γ.Α

$$\vec{BA} \times \vec{A\Gamma} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

$$\text{Εμβαδόν } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \frac{1}{2} |\vec{BA} \times \vec{A\Gamma}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ii)



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$\langle \vec{BA}, \vec{B\Delta} \rangle = \langle (1,1,0), (1,0,-1) \rangle = 1 = |\vec{BA}| \cdot |\vec{B\Delta}| \cos \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} \Rightarrow$$

$$\cos \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{B\Delta} = (1,0,-1)$$

$$|\vec{BA}| = |\vec{B\Delta}| = \sqrt{2}$$

Λένει

Άσκηση 7.

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{\gamma}) \times \vec{\beta} = 0$$

Λύση:

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{\gamma}$$

$$' \text{loa} \Leftrightarrow \frac{\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \cdot \vec{\gamma} - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \vec{a}}{(\vec{a} \times \vec{\gamma}) \times \vec{\beta}} = 0$$

Άσκηση 4

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \times \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})^2$$

Λύση.

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \times \vec{a}) = \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{a}) \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$$

$$(\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{a}) = \langle \vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{a} \rangle \vec{\gamma} - \langle \vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \rangle \vec{a}$$

$$= (\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{a}) \vec{\gamma} - (\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\gamma}) \vec{a} =$$

$$= -(\vec{a}, \vec{\gamma}, \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = (\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \vec{\gamma}$$

$$\text{Άρα } \Delta^{(1)} = \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \cdot (\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})^2$$

Συμπέρασμα: Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ $\neq 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \neq 0$

Άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \times \vec{a}$ είναι

Άσκηση 5

Μοναδιαία $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{j}$ με $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $\vec{a} \perp \vec{j}$

Να υπολογιστεί:

$$A = \langle ((\vec{a} \times \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta}) \times \vec{\beta} \rangle \times \vec{\beta}, \vec{j} \rangle$$

$$\text{Λύση: } (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} = \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle \vec{a} = \\ = -|\vec{\beta}|^2 \vec{a} = -\vec{a} \quad (1)$$

$$((\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} \stackrel{(1)}{=} (-\vec{a}) \times \vec{\beta} = -\vec{a} \times \vec{\beta} \quad (2)$$

$$((\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} \stackrel{(2)}{=} -(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta} \stackrel{(1)}{=} \vec{a}$$

$$\text{Οπότε } A = \langle \vec{a}, \vec{j} \rangle = 0$$

~~$\vec{a}, \vec{\beta}$ μοναδιαία καθε~~

Παρατήρηση:

$\vec{a}, \vec{\beta}$ μοναδιαία και καθετα $\Rightarrow \vec{a}, \vec{\beta}, \vec{a} \times \vec{\beta}$ ορθογώνια

$$\text{π.χ } ((\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \times \dots \times \vec{\beta} \rangle \times \vec{\beta}$$

$$\begin{aligned} &\wedge \text{ ύποψ, } n \in \mathbb{I}(A) \\ &n = 4m + v \end{aligned}$$

$$B = \begin{cases} \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{\beta} \\ -\vec{a} \\ -\vec{a} \times \vec{\beta} \end{cases}$$

$$v=0$$

$$v=1$$

$$v=2$$

$$v=3$$

Άσκηση 15

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{a} \parallel \vec{\gamma}$

Θεωρούμε $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x} \perp \vec{\gamma}$ και εναρμόνισει
 $\vec{a} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \times \vec{x}$

Να εκφράσει το $\vec{x}$ ως ανδράγμα των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Λύση: $\vec{a} \times \vec{\gamma} = \vec{\beta} \times \vec{\gamma} + (\vec{\gamma} \times \vec{x}) \times \vec{\gamma} = \vec{\beta} \times \vec{\gamma} + |\vec{\gamma}|^2 \vec{x} - \langle \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\gamma}$
 $\Leftrightarrow \vec{x} = \frac{\vec{a} \times \vec{\gamma} - \vec{\beta} \times \vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|^2} = - \frac{\vec{\beta} \times \vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|^2}$

Άσκηση 9

Δίνονται μοναδιαία $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια ώστε
ανά δύο να έχουν ίσες γωνίες.

Θεωρούμε $\vec{\lambda} = \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

$$\vec{\mu} = (\vec{a} - \vec{\beta}) \times (\vec{a} - \vec{\gamma}) \quad \text{με } \vec{\lambda} \neq \vec{0} + \vec{\mu}$$

Να εξετασθεί αν $\vec{\lambda} \parallel \vec{\mu}$

Λύση:

Υποθέτουμε: $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = \underbrace{|\vec{a}|}_{1} \underbrace{|\vec{\beta}|}_{1} \underbrace{\cos \varphi}_{\varphi} (\vec{a}, \vec{\beta})$$

Γνωρίζουμε ότι $\vec{\mu} \perp \vec{a} - \vec{\beta}$, $\vec{\mu} \perp \vec{a} - \vec{\gamma}$

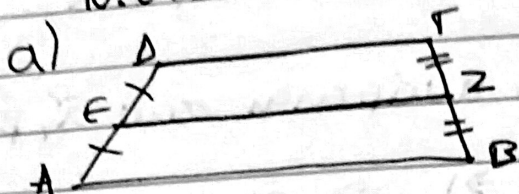
Αρκεί το $\vec{\lambda} \perp \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{\lambda} \perp \vec{a} - \vec{\gamma}$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\lambda}, \vec{a} - \vec{\beta} \rangle &= \langle \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{a} - \vec{\beta} \rangle = |\vec{a}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle - |\vec{\beta}|^2 \\ &\quad + \langle \vec{\gamma}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{\gamma}, \vec{\beta} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \vec{\lambda} &\perp \vec{a} - \vec{\beta} \end{aligned}$$

Ομοίως $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} - \vec{\beta}$
 Άρα $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \times (\vec{\alpha} - \vec{\gamma}) = \vec{\mu}$

Άσκηση 1

N.δ.ο



Λύση

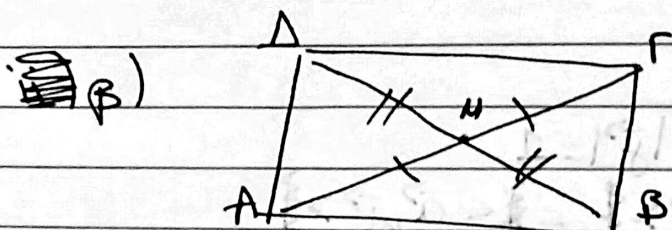
$$\vec{CE} = \vec{AC} - \vec{AE}$$

$$\vec{AC} = \frac{\vec{AB} + \vec{AF}}{2}$$

$$, \vec{AE} = \frac{\vec{AD}}{2} \Rightarrow \vec{CE} = \frac{\vec{AB} + \vec{AF}}{2} - \frac{1}{2} \vec{AD} =$$

$$= \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AF} - \vec{AD}}{2} =$$

$$= \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{DF}}{2}$$



Ο.δ.ο $\vec{AM} = \vec{MC}$ και $\vec{BM} = \vec{MD}$

Λύση

$$\vec{AM} = \vec{MC}$$

$$\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DM}$$

$$\vec{MC} = \vec{MD} + \vec{DC} = \vec{DC} - \vec{DM}$$

Άρα $\vec{AD} + \vec{DM} = \vec{DC} - \vec{DM} \Rightarrow \vec{DM} = \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{DC} \quad (1)$

$$\vec{\Delta M} = \mu \vec{\Delta B} = \mu (\vec{AB} - \vec{AA}) = \mu \vec{AB} + \mu \vec{AA} \quad (2)$$

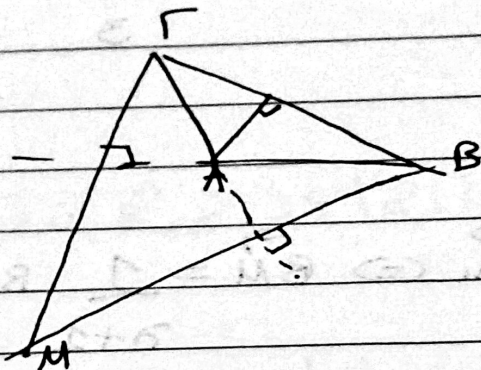
Οπότε: $\begin{cases} \mu = 1 \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}$$

ήδη
 $\vec{AM} = \vec{MF}$

ήδη
 $\vec{\Delta M} = \vec{MB}$

γ) Τα ύψη τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

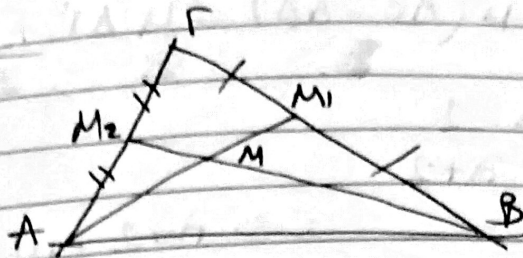


Γνωρίζουμε $\langle \vec{MA}, \vec{BF} \rangle = 0$
 $\langle \vec{MB}, \vec{AF} \rangle = 0$

Θα δείξουμε ότι: $\vec{MF} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \langle \vec{MF}, \vec{AB} \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \vec{MF}, \vec{AB} \rangle &= \langle \vec{MB} + \vec{BF}, \vec{AB} - \vec{BA} \rangle \\ &= \langle \vec{MB} + \vec{BF}, \vec{AF} - \vec{BF} \rangle \\ &= \langle \vec{MB}, \vec{AF} \rangle - \langle \vec{MB}, \vec{BF} \rangle + \langle \vec{BF}, \vec{AF} \rangle - |\vec{BF}|^2 = \\ &= \cancel{\langle \vec{MB}, \vec{AB} - \vec{AF} \rangle} + \langle \vec{BF}, \vec{AF} \rangle - |\vec{BF}|^2 = \\ &= \cancel{\langle \vec{MB}, \vec{AB} \rangle} \\ &= -\langle \vec{MA} + \vec{AB}, \vec{BF} \rangle + \langle \vec{BF}, \vec{AF} \rangle - |\vec{BF}|^2 = \\ &= -\langle \vec{MA}, \vec{BF} \rangle - \langle \vec{AB}, \vec{BF} \rangle + \langle \vec{BF}, \vec{AF} \rangle - |\vec{BF}|^2 \\ &= \langle \vec{BF}, \vec{AF} - \vec{AB} \rangle - |\vec{BF}|^2 = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 2



$$i) \vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AM_1}, \quad \vec{BM} = \frac{2}{3} \vec{BM_2}$$

$$ii) \text{ος από 0 ισχύει } \vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG})$$

Λύση

$$i) \vec{AM} = \lambda \vec{AM_1} \Leftrightarrow \vec{BM} = \frac{1}{\lambda+1} \vec{BA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{BM_1}$$

$$= \frac{1}{\lambda+1} \vec{BA} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \vec{BG}$$

$$\vec{BM} = \mu \vec{BM_2} = \mu \frac{\vec{BG} + \vec{BA}}{2}$$

$$\text{Άρα: } \begin{cases} \frac{\mu}{2} = \frac{1}{\lambda+1} \\ \frac{\mu}{2} = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2, \mu = \frac{2}{3}$$

$$ii) \quad \vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AM}$$

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$$

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$$

$$\text{Αρα} \quad \vec{OM} - \vec{OA} = \frac{2}{3} (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{2}{3} (\vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OA})$$

$$\Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Άσκηση (από παλιό πουλ).

$$\text{Να δείχθει ότι} \quad [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \leq |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}|$$

Λύση

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \phi \quad \text{στοinia}$$

$$= |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \phi \quad (\vec{a}, \vec{b}) \cos \phi \quad (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

$$\leq |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}|$$

$\begin{matrix} R & \uparrow \\ \text{ισχύει στα} & \text{με πολλαπλασιάζοντας} \end{matrix}$

Άσκηση 16

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ γνωστά. Να λυθεί} \quad \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} - \vec{x}$$

Λύση:

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{a} \times \vec{x} \quad (1)$$

$$i) \text{ αν } \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{b}$$

$$\text{Έστω } \vec{a} \neq 0$$

$$(1) \times \vec{a} : \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + |\vec{a}|^2 \vec{x} - \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{a}$$

$$ii) \text{ Αν τα } \vec{a}, \vec{b} \text{ Γ.Ε τότε η (2) γίνεται}$$

$$\vec{x} \times \vec{a} = |\vec{a}|^2 \vec{x} - \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{a} \quad \text{Αρα } \vec{x} = 0$$

iii) Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in A$ τότε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$
είναι βάσις, άρα

$$\vec{x} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{b} + \nu (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (3)$$

Από (1), (2) ~~και (3)~~

$$\vec{b} - \vec{x} = |\vec{a}|^2 \vec{x} + \vec{b} \times \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{a}$$

Πράξεις. αριστερά x

και πάλι οι 3x3

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa (2 + |\vec{a}|^2) = \kappa |\vec{a}|^2 + \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \lambda = \mu = 1 \\ 2 + |\vec{a}|^2 \end{array} \right.$$



$$\kappa = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$2 + |\vec{a}|^2 \kappa$$